

## תוכן העניינים:

3	חשבון דיפרנציאלי
3	פונקצית הפולינום
3	חזרה כללית:
3	סיכום כללי:
4	שאלות:
4	תשובות סופיות:
5	הנגזרת:
5	סיכום כללי:
5	שאלות:
6	תשובות סופיות:
7	שיפוע משיק לגרף הפונקציה:
7	סיכום כללי:
7	שאלות:
8	תשובות סופיות:
9	מצייאת נקודת השקה לפי שיפוע משיק:
9	סיכום כללי:
9	שאלות:
9	תשובות סופיות:
10	מצייאת משוואת משיק לגרף הפונקציה:
10	סיכום כללי:
10	שאלות:
11	תשובות סופיות:
12	חקירת פונקצית פולינום:
12	סיכום כללי:
14	שאלות:
17	תשובות סופיות:
18	נגזרת שנייה של פונקציה:
18	סיכום כללי:
18	שאלות:
19	תשובות סופיות:
20	מינימום ומקסימום מוחלטים:
20	סיכום כללי:
21	שאלות:
21	תשובות סופיות:

22.....: שאלות עם פרמטרים

22.....: סיכום כללי

22.....: שאלות

23.....: תשובות סופיות

# חשבון דיפרנציאלי

## פונקצית הפולינום

### חזרה כללית:

**סיכום כללי:**

**פונקציה - הגדרה:**

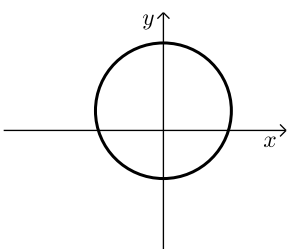
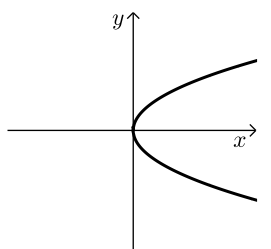
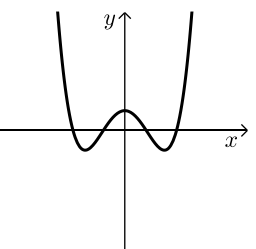
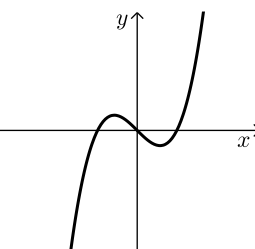
התאמה המשייכת לכל איבר מקבוצת התחום  $x$ , איבר אחד ויחיד מקבוצת הטווח  $y$ .

**סימון של פונקציה:**

נסמן באות  $f$  את הקשר שבין האיברים משתי הקבוצות כך:  $y = f(x)$ .

**ייצוג גרפי של פונקציה:**

להלן דוגמאות לגרפים שמייצגים פונקציות ועקומים שאינם פונקציות:

לא פונקציות	פונקציות
 	 

**סימון ערך נקודה:**

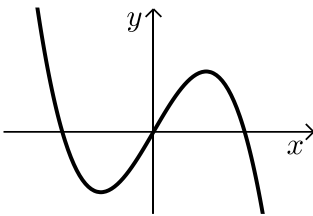
נסמן ערך של פונקציה כגון  $f(x) = x^2 - 3x$  כך:  $f(5) = 10$  או  $(5, 10)$ .

**שאלות:**

(1) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ .  
חשב את ערך הפונקציה בנקודות  $x = 2$  ו- $x = -1$ .

(2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^4}{4} - 4x$ .  
חשב את ערך הפונקציה בנקודות  $x = -3$  ו- $x = -2$ .

(3) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה  $f(x) = -x^3 + 16x$  עם ציר ה- $x$ .



(4) מצא את נקודות החיתוך בין הפונקציות הבאות:  
 $f(x) = 2x^2 - 10x + 7$  ו- $g(x) = -x^2 + 14x - 14$ .

**תשובות סופיות:**

(1)  $f(2) = 7, f(-1) = 4$

(2)  $f(-3) = 32\frac{1}{4}, f(-2) = 12$

(3)  $(0,0), (4,0), (-4,0)$

(4)  $(7,35), (1,-1)$

## הנגזרת:

### סיכום כללי:

### פונקצית הנגזרת:

בהינתן הפונקציה  $y = x^n$  כאשר  $n$  מספר טבעי, הנגזרת שלה תחושב:  $y' = n \cdot x^{n-1}$ .

### כללים:

- בפונקציה עם מקדם:  $y = Ax^n$ , נכפול את הנגזרת פי מקדם זה:  $y' = A \cdot nx^{n-1}$ .
- בפונקציה עם מספר מחוברים נגזור כל מחובר בנפרד.
- נגזרת של מספר קבוע היא 0.

### שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

- |               |                |                          |
|---------------|----------------|--------------------------|
| א. $y = x^2$  | ב. $y = x^3$   | ג. $y = x^6$             |
| ד. $y = 4x^3$ | ה. $y = 12x^4$ | ו. $y = \frac{1}{2}x^2$  |
| ז. $y = 7$    | ח. $y = -3x^2$ | ט. $y = -\frac{1}{3}x^3$ |

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

- |  |  |
|--|--|
| א. $y = 5x^2 - 3x$                       | ב. $y = 3x^3 + 14x$                      |
| ג. $y = \frac{1}{3}x^6 - \frac{2}{5}x^5$ | ד. $y = \frac{1}{6}x^4 - \frac{3}{7}x^5$ |

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                     |                    |
|---------------------|--------------------|
| א. $y = (x-2)(x+3)$ | ב. $y = x^2(3-x)$  |
| ג. $y = (x+2)^2$    | ד. $y = 3x(x-1)^2$ |

**תשובות סופיות:**

$$y' = 48x^3 \text{ .ה} \quad y' = 12x^2 \text{ .ד} \quad y' = 6x^5 \text{ .ג} \quad y' = 3x^2 \text{ .ב} \quad y' = 2x \text{ .א} \quad \mathbf{(1)}$$

$$. y' = -x^2 \text{ .ט} \quad y' = -6x \text{ .ח} \quad y' = 0 \text{ .ז} \quad y' = x \text{ .ו}$$

$$y' = 2x^5 - 2x^4 \text{ .ג} \quad y' = 9x^2 + 14 \text{ .ב} \quad y' = 10x - 3 \text{ .א} \quad \mathbf{(2)}$$

$$. y' = \frac{2}{3}x^3 - \frac{15}{7}x^4 \text{ .ד}$$

$$y' = 2x + 4 \text{ .ג} \quad y' = 6x - 3x^2 \text{ .ב} \quad y' = 2x + 1 \text{ .א} \quad \mathbf{(3)}$$

$$. y' = 9x^2 - 12x + 3 \text{ .ד}$$

## שיפוע משיק לגרף הפונקציה:

### סיכום כללי:

הנגזרת של פונקציה בנקודה שבה  $x = x_0$  מסוים תיתן את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה.  
מקובל לקרוא לשיפוע המשיק לגרף הפונקציה גם בשם **שיפוע הפונקציה** בנקודה שבה  $x = x_0$ .  
מתמטית נרשום:  $f'(x_0) = m$ .

### שאלות:

(1) נתונה הפונקציה:  $y = x^2$ .

- א. מצא את נגזרת הפונקציה.  
ב. חשב את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה  $x = 3$ .

(2) נתונה הפונקציה:  $y = 5x^2 - 2x$ .

- א. מצא את נגזרת הפונקציה.  
ב. חשב את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה  $x = -2$ .

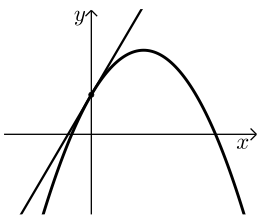
(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2x^3 - 4x + 2$ .

חשב את:  $f'(3)$ ,  $f'(-1)$ ,  $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ .

(4) חשב את שיפוע המשיק לפונקציה  $y = 2x^4 - x$  בנקודה  $x = 1$ .

(5) נתונה הפונקציה:  $y = -x^2 + 6x + 8$ .

- א. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .  
ב. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלו עם ציר ה- $y$ .



**תשובות סופיות:**

$$\text{א. } y' = 2x \quad \text{ב. } y'(3) = 6 \quad \text{(1)}$$

$$\text{א. } y' = 10x - 2 \quad \text{ב. } y'(-2) = -22 \quad \text{(2)}$$

$$f'(3) = 50, f'(-1) = 2, f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2.5 \quad \text{(3)}$$

$$m = y'(1) = 7 \quad \text{(4)}$$

$$\text{א. } (0, 8) \quad \text{ב. } m = 6 \quad \text{(5)}$$



## מציאת נקודת השקה לפי שיפוע משיק:

### סיכום כללי:

כדי למצוא נקודת השקה בהינתן שיפוע הפונקציה (או שיפוע המשיק לגרף הפונקציה) בנקודה זו, נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת לשיפוע הנתון. מהמשוואה המתקבלת נמצא את שיעור/י ה- $x$  של נקודות ההשקה. נציב את שיעורי ה- $x$  שהתקבלו מפתרון המשוואה בפונקציה המקורית  $f(x)$  כדי למצוא את שיעור ה- $y$  ולכתוב את שיעורי הנקודות המלאים.

### שאלות:

(1) נתונה הפונקציה:  $y = 2x^2 + 9x - 3$ .

- א. מצא נקודה שבה שיפוע הפונקציה הוא 17.  
ב. מצא נקודה שבה שיפוע הפונקציה הוא 0.

(2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 9x$ .

- א. חשב את  $f'(1)$ .  
ב. חשב את ערכי  $x$  עבורם מתקיים:  $f'(x) = 3$ .

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = (x-5)(x+1)^2$ .

- א. מצא את שיעורי הנקודות שבהן שיפוע הפונקציה הוא אפס.  
ב. מצא את שיעורי הנקודה שבה שיפוע הפונקציה הוא -12.

### תשובות סופיות:

(1) א.  $(2, 23)$       ב.  $\left(-2\frac{1}{4}, -13\frac{1}{8}\right)$

(2) א.  $f'(1) = -6$       ב.  $x = \pm 2$

(3) א.  $(3, -32), (-1, 0)$       ב.  $(1, -16)$

## מציאת משוואת משיק לגרף הפונקציה:

### סיכום כללי:

כדי למצוא משוואת משיק נעזר בנוסחה לכתובת משוואת ישר:  $y - y_1 = m(x - x_1)$

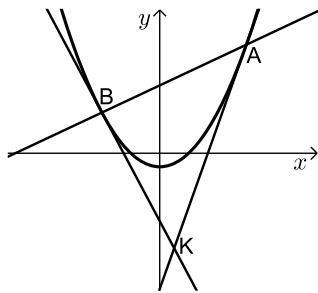
כאשר  $(x_1, y_1)$  הם שיעורי נקודה ההשקה ו- $m$  הוא שיפוע הישר.

- בשאלות שבהן נקודת ההשקה נתונה, נמצא את השיפוע ע"י הנגזרת (הצבת הנקודה בנגזרת).
- בשאלות שבהן השיפוע נתון, נמצא את נקודת ההשקה ע"י השוואת הנגזרת לשיפוע הנתון.

### שאלות:

- (1) לפונקציה  $y = 3x^2$  מעבירים משיק בנקודה שבה  $x = 2$ . כתוב את משוואתו.
- (2) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \frac{x^3 + 12x}{3}$  בנקודה שבה  $x = -1$ .
- (3) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה  $y = 2x^2 + 5x - 3$  בנקודות החיתוך שלו עם ציר ה- $x$ .
- (4) לגרף הפונקציה  $y = 3x^2 - 5x + 8$  מעבירים משיק ששיפועו 7.
  - א. מצא את שיעורי נקודת ההשקה.
  - ב. כתוב את משוואת המשיק.
- (5) מצא נקודה על גרף הפונקציה  $y = x^2 - 2x - 1$  שבה המשיק מקביל לציר ה- $x$ .
- (6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 9x + 4$ . מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה המקבילים לישר  $y = 8x - 2$ .

7) הישר  $y = x + 5$  חותך את גרף הפרבולה  $y = x^2 - 1$  בנקודות A ו-B (ראה איור).



מעבירים משיקים לגרף הפרבולה בנקודות A ו-B. המשיקים נפגשים בנקודה K.

- א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
- ב. מצא את משוואות המשיקים.
- ג. מצא את שיעורי הנקודה K.

### תשובות סופיות:

1)  $y = 12x - 12$

2)  $y = 5x + \frac{2}{3}$

3)  $y = -7x - 21$  ו-  $y = 7x - 3\frac{1}{2}$

4) א.  $(2, 10)$  ב.  $y = 7x - 4$

5)  $(1, -2)$

6)  $y = 8x + 4\frac{4}{27}$  ו-  $y = 8x + 4$

7) א.  $A(3, 8)$ ,  $B(-2, 3)$  ב.  $y = -4x - 5$  ו-  $y = 6x - 10$  ג.  $K\left(\frac{1}{2}, -7\right)$

## חקירת פונקציה פולינום:

**סיכום כללי:**

**הגדרה כללית:**

פונקציה המורכבת מ-יחוליות של  $x$ -ים בחזקות שונות, כאשר כל החזקות הן מספרים טבעיים, נקראת פונקציה פולינומית.

דוגמאות:  $f(x) = x^3 + \frac{x}{2}$ ,  $f(x) = x^3 - x^2 + 4$ ,  $f(x) = x^2 + 7x + 10$ .

**הערה:**

לעיתים נקבל פונקציות פולינום אשר יש לסדר אותן תחילה.

**תחום ההגדרה של פונקציה פולינום:**

פונקציה פולינומית מוגדרת לכל ערך של  $x$ .

**תחומי עליה וירידה של פונקציה:**

- תחום עליה הוא כזה שבו ערכי הפונקציה גדלים ככל שמתקדמים עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .
- תחום ירידה הוא כזה שבו ערכי הפונקציה קטנים ככל שמתקדמים עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

**נקודות מינימום ומקסימום של פונקציה:**

- נקודת מקסימום היא נקודה שעד אליה הפונקציה עולה ואחריה הפונקציה יורדת.
- נקודת מינימום היא נקודה שעד אליה הפונקציה יורדת ואחריה הפונקציה עולה.
- נקודות מקסימום ומינימום של פונקציה נקראות: **נקודות הקיצון המקומיות (פנימיות) של הפונקציה.**
- בנקודות הקיצון, הפונקציה משנה את מגמת ההתקדמות שלה (מעלייה לירידה, או מירידה לעלייה).

### כתיבת תחומי עלייה וירידה באמצעות הנגזרת:

נתונה פונקציה  $f(x)$  ונתונה נקודה  $(x_0, y_0)$  על גרף הפונקציה.

- אם נגזרת הפונקציה בנקודה,  $f'(x_0)$ , היא חיובית אז הפונקציה במגמת עלייה.
- אם נגזרת הפונקציה בנקודה,  $f'(x_0)$ , היא שלילית את הפונקציה במגמת ירידה.

בקצרה:

- אם:  $f'(x_0) > 0$  אז  $f(x)$  עולה.
- אם:  $f'(x_0) < 0$  אז  $f(x)$  יורדת.

### נקודות קיצון:

נקודות קיצון של פונקציה הן נקודות אשר מאפסות את נגזרת הפונקציה והפונקציה משנה את מגמת ההתקדמות שלה לפנייה ואחריהן.

אם נקודה  $A(x_0, y_0)$  מקיימת:  $f'(x_0) = 0$  והפונקציה עולה לפני  $A$  ויורדת אחריה, או להיפך, אז נאמר כי הנקודה  $A(x_0, y_0)$  היא נקודת קיצון של הפונקציה.

- אם הפונקציה יורדת לפני הנקודה  $A$  ועולה אחריה, אז  $A$  היא נקודת מינימום.
- אם הפונקציה עולה לפני הנקודה  $A$  ויורדת אחריה, אז  $A$  היא נקודת מקסימום.

### טבלת תחומי עלייה וירידה:

כשאנו מקבלים פונקציה  $f(x)$  ומוצאים את הנקודות שמאפסות את נגזרתה ( $f'(x) = 0$ ) דרך נוחה לתאר את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה תהיה באמצעות טבלת תחומי עלייה וירידה.

**כללים למציאת נקודות קיצון וקביעת סוג הקיצון:**

- (1) נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס:  $f'(x) = 0$ .
- (2) נפתור את המשוואה שהתקבלה ונמצא את שיעורי ה- $x$  של הנקודות החשודות לקיצון.
- (3) נמצא את שיעורי ה- $y$  של כל הנקודות שהתקבלו ונרשום אותן במלואן.
- (4) נקבע את סוג הקיצון (מקסימום או מינימום) ע"י טבלת תחומי עלייה וירידה.

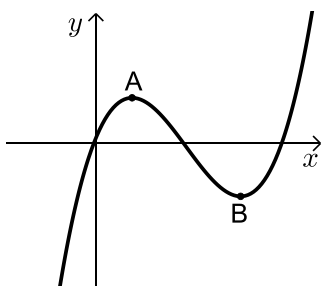
**שלבי חקירה מלאה:**

- (1) מציאת/כתיבת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (2) מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן (מקסימום או מינימום).
- (3) כתיבת תחומי עלייה וירידה.
- (4) מציאת נקודות חיתוך עם צירים (במידה וישנן).
- (5) סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**שאלות:**

**מציאת נקודות קיצון וקביעת תחומי עלייה וירידה:**

- (1) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = x^2 - 10x + 21$ .
  - א. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
  - ב. באלו תחומים הפונקציה עולה ובאילו תחומים היא יורדת?



- (2) לפניך גרף הפונקציה:  $y = x^3 - 15x^2 + 48x + 6$ .
  - הנקודה A היא נקודת המקסימום של הפונקציה והנקודה B היא נקודת המינימום שלה.
  - א. מצא את שיעורי ה- $x$  של הנקודות A ו-B.
  - ב. רשום את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

3 מצא את נקודות הקיצון (הפנימיות) וכתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות הבאות:

א.  $y = -2x^3 + 12x^2$

ב.  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

4 נתונה הפונקציה:  $y = x^3 + x + 3$

א. הראה כי לפונקציה אין נקודות קיצון כלל.

ב. הוכח כי הפונקציה עולה לכל ערך של  $x$ .

### חקירת פונקציה:

5 נתונה הפונקציה:  $y = x^2 - 9x + 8$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

6 חקור את הפונקציה:  $y = x^3 - 3x^2 - 9x$  לפי הסעיפים הבאים:

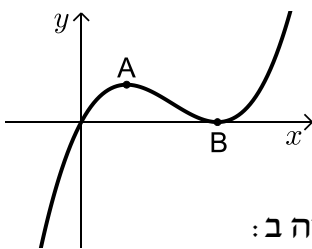
א. תחום הגדרה.

ב. נקודות מינימום ומקסימום.

ג. תחומי עלייה וירידה.

ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



7 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $y = x(x-1)^2$

לפונקציה מקסימום מקומי בנקודה A

ומינימום מקומי בנקודה B.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. עבור אילו ערכי  $k$  הישר  $y = k$  חותך את גרף הפונקציה ב:

i. שלוש נקודות.

ii. שתי נקודות.

iii. נקודה אחת.

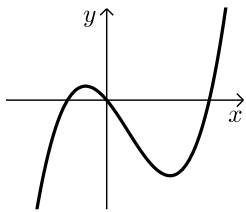
8 נתונה הפונקציה הבאה :  $f(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2$ .

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?  
ב. מצא את נקודות המינימום ונקודות המקסימום של הפונקציה.  
ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.  
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
ו. נתון הישר  $y = k$ . בכמה נקודות חותך הישר את גרף הפונקציה בכל מקרה:
- i.  $k = -2$   
ii.  $k = 8$   
iii.  $k = 12$

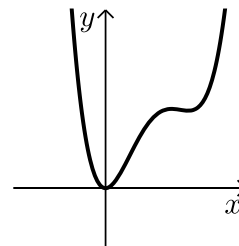


תשובות סופיות:

- (1) א.  $\min(5, -4)$  ב. עולה:  $x > 5$ , יורדת:  $x < 5$ .
- (2) א.  $x_A = 2, x_B = 8$  ב. עולה:  $x < 2, x > 8$ ; יורדת:  $2 < x < 8$ .
- (3) א.  $\max(4, 64), \min(0, 0)$ , עולה:  $0 < x < 4$ , יורדת:  $x < 0, x > 4$ .
- ב.  $\max(-2, 20), \min(1, -7)$ , עולה:  $x < -2, x > 1$ ; יורדת:  $-2 < x < 1$ .
- (4) א. שאלת הוכחה. ב. הנגזרת חיובית לכל ערך של  $x$  ולכן הפונקציה תמיד עולה.
- (5) א. כל  $x$  ב.  $\min\left(4\frac{1}{2}, -12\frac{1}{4}\right)$  ג.  $(0, 8), (1, 0), (8, 0)$
- ד. ראה סקיצה בסרטון הוידאו.
- (6) א. כל  $x$  ב.  $\max(-1, 5), \min(3, -27)$  ג. עולה:  $x < -1, x > 3$ ; יורדת:  $-1 < x < 3$  ד.  $(0, 0)$  ה. להלן סקיצה:



- (7) א.  $A\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right), B(1, 0)$  ב. (i)  $0 < k < \frac{4}{27}$
- ב. (ii)  $k = 0, \frac{4}{27}$  ב. (iii)  $k < 0, k > \frac{4}{27}$
- (8) א. כל  $x$  ב.  $\min\left(2\frac{1}{2}, 7\frac{13}{16}\right), \max(2, 8), \min(0, 0)$
- ג. עולה:  $0 < x < 2, x > 2\frac{1}{2}$ ; יורדת:  $x < 0, 2 < x < 2\frac{1}{2}$  ד.  $(0, 0)$
- ה. להלן סקיצה:
- ו. (i) אף נקודה.  
ו. (ii) 3 נקודות שונות.  
ו. (iii) 2 נקודות שונות.



## נגזרת שנייה של פונקציה:

**סיכום כללי:**

**הגדרה:**

הנגזרת השנייה,  $f''(x)$  של פונקציה  $f(x)$  הינה פונקציה המתקבלת מגזירה של  $f(x)$  פעמיים.

**משפט:**

נתונה נקודה  $(x_0, y_0)$  המאפסת את נגזרת הפונקציה  $f(x)$ , כלומר:  $f'(x_0) = 0$  אז:

- אם  $f''(x_0) > 0$  הנקודה היא נקודת מינימום.
- אם  $f''(x_0) < 0$  הנקודה היא נקודת מקסימום.

**הערה:**

לא נעסוק במקרים בהם:  $f''(x_0) = 0$ .

**שאלות:**

**נגזרת שנייה:**

(1) נתונה הפונקציה:  $y = x^3 + 13x + 9$ .

א. כתוב את נגזרת הפונקציה  $y'$ .

ב. כתוב את הנגזרת השנייה של הפונקציה  $y''$ .

ג. חשב את ערך הנגזרת השנייה בנקודות שבהן:  $x = 1$  ו- $x = -2$ .

(2) הראה כי הנגזרת השנייה של הפונקציה:  $f(x) = 3x^2 - 6x + 6$  היא קבועה.

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 12x$ .

הראה כי הנגזרת השנייה של הפונקציה שלילית עבור  $x = 2$  וחיובית עבור  $x = -2$ .

**מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן באמצעות נגזרת שנייה:**

(4) מצא את נקודות הקיצון (הפנימיות) של הפונקציות הבאות והיעזר בנגזרת השנייה בכדי לקבוע את סוגן:

א.  $y = -x^2 + 4x + 2$

ב.  $y = 2x^2 - 7x + 3$

(5) מצא את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה:  $f(x) = 2x(x-9)^2$ .

**תשובות סופיות:**

(1) א.  $y' = 3x^2 + 13$     ב.  $y'' = 6x$     ג.  $y''(1) = 6, y''(-2) = -12$

(2) התקבלה נגזרת שנייה קבועה:  $f''(x) = 6$ .

(3) הוכחה.

(4) א.  $\max(2, 6)$     ב.  $\min\left(1\frac{3}{4}, -3\frac{1}{8}\right)$

(5)  $\max(3, 216), \min(9, 0)$

## מינימום ומקסימום מוחלטים:

### סיכום כללי:

#### חקירה בתחום סגור:

למדנו כי פונקציה הפולינום מוגדרת לכל  $x$ , כלומר עבור כל ערך של  $x$  נקבל ערך  $y$  כלשהו. לעיתים מקובל לתחום את הפונקציה בתחום מסוים, למשל:  $2 \leq x \leq 8$ ,  $x > 7$  וכו'.

- תחום סגור - מסומן עם סוגריים מרובעות:  $[2, 6] \rightarrow 2 \leq x \leq 6$  וכולל את קצוות התחום.
- תחום פתוח - מסומן עם סוגריים עגולות:  $(2, 6) \rightarrow 2 < x < 6$  ואינו כולל את קצוות התחום.

#### נקודות קיצון פנימיות ונקודות קיצון קצה:

- נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) הן נקודות המתקבלות מאיפוס הנגזרת ושינוי מגמת ההתקדמות של הפונקציה לפנייהן ואחריהן (בעצם, מה שעשינו עד כה).
- נקודות קיצון קצה הן נקודות קצה התחום הסגור הנתון בשאלה.

### סיכום:

בחקירת פונקציה בקטע סגור נגדיר את נקודות הקיצון המוחלטות כך:

- נקודת מקסימום מוחלטת: הנקודה הגבוהה ביותר מבין נקודות מקסימום הקצה והמקומיות.
- נקודת מינימום מוחלטת: הנקודה הנמוכה ביותר מבין נקודות מינימום הקצה והמקומיות.

### הערה:

ייתכן ותהיינה יותר מנקודת מקסימום מוחלטת אחת או יותר מנקודת מינימום מוחלטת אחת.

**שאלות:**

- (1) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2 - 6x + 10$  בקטע  $[0, 4]$ .
- א. מצא את שיעורי נקודות הקצה של תחום ההגדרה.  
 ב. מצא את הנקודות שבהן הנגזרת של הפונקציה מתאפסת.  
 ג. ציין את נקודות הקיצון המקומיות והמוחלטות של הפונקציה.
- (2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$  בקטע  $[-3, 2]$ .  
 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות והמקומיות של הפונקציה בתחום הנתון.
- (3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3x - x^3$  בקטע  $[-3, 2]$ .  
 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות והמקומיות של הפונקציה בתחום הנתון.

**תשובות סופיות:**

- (1) א. קצה  $(0, 10)$ , קצה  $(4, 2)$       ב.  $\min(3, 1)$  מקומי  
 ג.  $\max(0, 10)$  מוחלט,  $\min(3, 1)$  מוחלט.
- (2)  $\min(-3, -26)$  מוחלט,  $\max(2, 29)$  מוחלט.
- (3)  $\max(-3, 18)$  מוחלט,  $\min(-1, -2)$  מוחלט,  $\min(2, -2)$  מוחלט.

## שאלות עם פרמטרים:

### סיכום כללי:

בשאלות שבהן נתון פרמטר, יש לבצע את כל הפעולות האלגבריות שלמדנו עם התייחסות לפרמטר כאל מספר.  
לאחר שמצאנו את ערכו של הפרמטר, נזכור לכתוב את הפונקציה ואת הנגזרת פעם נוספת בטרם נמשיך בפתרון השאלה.

### שאלות:

- (1) נתונה הפונקציה:  $y = ax^2 + 3$ ,  $a$  הוא פרמטר.  
א. מצא את  $a$  אם ידוע כי  $y'(-1) = 4$ .  
ב. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 4$ .
- (2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 + kx + 1$ ,  $k$  הוא פרמטר.  
א. מצא את  $k$  אם ידוע כי שיפוע המשיק בנקודה שבה  $x = -1$  הוא 2.  
ב. מצא נקודה נוספת שבה:  $f'(x) = 2$ .  
ג. כתוב את משוואות שני המשיקים לגרף הפונקציה  $f(x)$  שבהם  $f'(x) = 2$ .
- (3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{Ax^3}{3} - 2x^2 - x - 1$ ,  $A$  הוא פרמטר.  
המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = 3$  מקביל לישר  $y = 5x + 3.5$ .  
מצא את משוואת המשיק.
- (4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2x^3 + bx^2 - 48x + 12$ ,  $b$  הוא פרמטר.  
שיעור ה- $x$  של הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא 2.  
מצא את ערכו של  $b$  והראה שהנקודה היא נקודת מינימום.
- (5) לפונקציה:  $f(x) = mx^3 - 3x^2$  (פרמטר)  $m$  יש נקודת קיצון שבה:  $x = 1$ .  
א. הוכח שנקודה זו היא נקודת מינימום.  
ב. מצא את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = -2$ .

**תשובות סופיות:**

- (1) א.  $a = -2$       ב.  $y = -16x + 35$
- (2) א.  $k = -1$       ב.  $(1,1)$
- (3)  $y = 5x - 19$  (הערך של A הוא 2).
- (4)  $b = 6$
- (5) א. הוכחה. (מתקבל:  $m = 2$ )      ב.  $y = 36x + 44$
- ג.  $y = 2x - 1, y = 2x + 3$